

Modelado de un brazo robótico de dos articulaciones mediante el método de Lagrange

Cirera, Eduardo A. - Bravo, Gerardo A. - Filipigh, Jorge E.

GETeC – Facultad de Ingeniería, UNNE
 Carrera de Ingeniería Electromecánica

Antecedentes: El uso de mecanismos conducidos por red tendonal se justifica por la enorme ventaja que significa la posibilidad de liberar al manipulador del peso extra que significan los motores y reductores en las articulaciones. Es por ello que son muy utilizados en pequeños robots o partes de ellos (e.g. dedos, manos) ya que reducen significativamente el peso de los eslabones. Si a esto se le agrega además el diseño de eslabones cada vez más delgados y livianos, y altas velocidades de trabajo, aparecerán como consecuencia efectos indeseables como vibraciones mecánicas. Para diseñar el control de estos manipuladores es necesario tener en cuenta, entre otros aspectos, la elasticidad de los cables (tendones). En [1] se mencionan algunas dificultades de los controladores tradicionales para este tipo de manipuladores. El presente trabajo se desarrolla como parte del proyecto de investigación llevado adelante por el GETeC (Grupo de Estudio en Tecnologías de Control), y se pretende corregir y ampliar los conceptos vertidos en un anterior trabajo [2]. El Objetivo principal es desarrollar un modelo matemático de un brazo de dos articulaciones, conducido mediante una red tendonal y con parámetros de diseño generales, que permita obtener datos para la construcción de un prototipo. Posteriormente, mediante la modificación de parámetros y el estudio de los efectos de esos cambios, se desarrollará un modelo con comportamiento de estructura flexible para su posterior construcción.

Materiales y Métodos: Para desarrollar el modelo buscado, se deben encontrar ecuaciones que vinculen las variables (dependientes) posición y esfuerzos en las articulaciones en función del tiempo (variable independiente) para, de esta manera, poder predecir los esfuerzos a controlar y dimensionar los elementos de control y accionamiento del brazo. Con esto se pretende un modelo lo más realista posible, pero a su vez con un alto grado de flexibilidad en sus parámetros, lo que permitirá seleccionar los elementos adecuados para la posterior construcción.

Para el desarrollo del modelo se plantean las siguientes hipótesis simplificadoras:

-Las masas de cada brazo se encuentran concentradas en los extremos de estos. En otras publicaciones, como por ejemplo [3] y [4] se trabaja con las masas concentradas en los centros de masa de cada brazo, pero en nuestro caso, la mayor concentración de masa se produce, efectivamente, en las articulaciones, como se indica en la figura 1. No obstante, cualquiera de estas dos hipótesis inducen a un error, que si bien puede llegar a tener algún efecto no contemplado en el comportamiento del prototipo real, es tolerable por la mayor dificultad matemática a la que se enfrenta al tratar con parámetros distribuidos. De todas maneras lo que se realiza es introducir en el modelo final factores de corrección para contemplarlo.

-Movimiento plano. No se consideran aquí las rotaciones que podrían producirse en el origen de coordenadas, ya que no existe una tercera articulación ubicada en ese punto.

-Estructura rígida. No se consideran deformaciones de los brazos, ya que escapa al objetivo inicial de este trabajo.

-Movimiento sin fricción. No se considera fricción en las articulaciones ni en los mecanismos de accionamiento.

Planteamiento del modelo: Las ecuaciones dinámicas de un robot se pueden obtener partiendo de las ecuaciones del movimiento de Newton, sin embargo, cuando se aumenta el número de articulaciones aumentan notablemente las complicaciones. El método de Lagrange es, en estos casos más adecuado, y lo constituyen las denominadas Ecuaciones de Movimiento de Lagrange.

Planteo de las ecuaciones para obtener el Lagrangiano.

$$\text{Energía Cinética: } T = \frac{m_1}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left[(L_1^2 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + L_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 (L_2^2 + 2 L_1 L_2 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right]$$

$$\text{Energía Potencial: } U = m_1 g L_1 \sin \varphi_1 + m_2 g [L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\text{Lagrangiano: } L = T - U$$

Entonces, se tendrá que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = m_1 L_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 (L_1^2 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_1 + m_2 (L_2^2 + L_1 L_2 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 L_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 (L_2^2 + L_1 L_2 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = -m_1 g L_1 \cos \varphi_1 - m_2 g [L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = -m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2 \left(\ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right) - m_2 g L_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = m_1 L_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 (L_1^2 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 \cos \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 - (2 m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 (L_2^2 + L_1 L_2 \cos \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - (m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 (L_2^2 + L_1 L_2 \cos \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 L_2^2 \ddot{\varphi}_2 - (m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

Para obtener el modelo, se plantea: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \tau_1$ y $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = \tau_2$

Operando y ordenando se obtiene el modelo del brazo:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} \dot{\varphi}_2 & C_{12} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \\ C_{21} \dot{\varphi}_1 & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

En esta expresión, se llamó:

$$M_{11} = (m_1 + m_2) L_1^2 + m_2 L_2^2 + 2 m_2 L_1 L_2 \cos \varphi_2 ; M_{12} = M_{21} = m_2 L_2^2 + m_2 L_1 L_2 \cos \varphi_2 ; M_{22} = m_2 L_2^2$$

$$C = m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2 \Rightarrow C_{11} = -C ; C_{12} = -C ; C_{21} = C ; C_{22} = 0$$

$$N_1 = (m_1 + m_2) g L_1 \cos \varphi_1 + m_2 g L_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) ; N_2 = m_2 g L_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

τ_1 y τ_2 son los Torques aplicados directamente en las articulaciones.

Esquema de Poleas y Tendones: Los Torques serán calculados como funciones del **recorrido**, de la **elasticidad** y de la **extensión** de los Tendones.

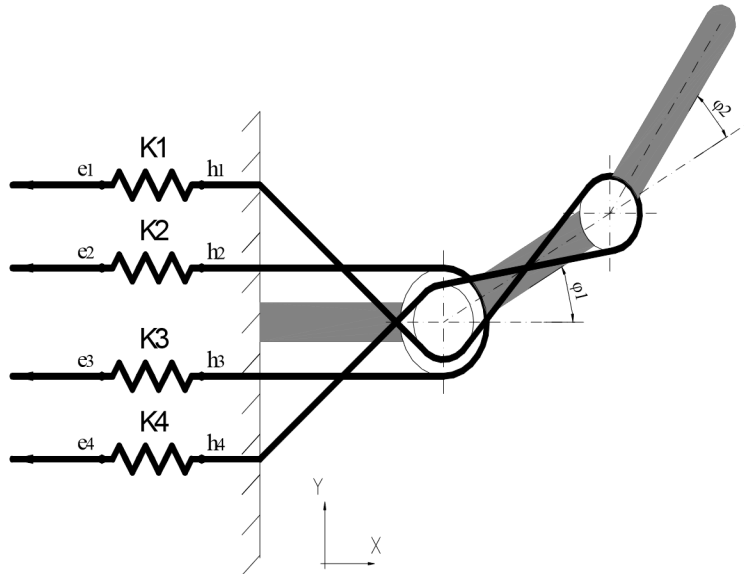


Figura 1: Esquema de manipulador con dos articulaciones conducido por red tendonal

Con esta configuración, la dinámica del modelo tiene la siguiente expresión:

$$[M(\varphi)] \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + [C(\varphi, \dot{\varphi})] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + [N(\varphi, \dot{\varphi})] + [P \cdot K(h(\varphi) - h(0))] = [P \cdot K \cdot e]$$

Con la nomenclatura indicada en esta figura, planteamos:

Funciones del **Recorrido** de los tendones (o extensión debida a los mecanismos):

$$h_1 = L_1 + R_{11} \varphi_1 - R_{12} \varphi_2 ; h_2 = L_2 - R_{21} \varphi_1 ;$$

$$h_3 = L_3 + R_{31} \varphi_1 ; h_4 = L_4 - R_{41} \varphi_1 + R_{42} \varphi_2$$

Donde:

L_i son las Longitudes Nominales de cada tendón, cuando $\varphi_i = 0$;

R_{ij} son los Radios de las poleas del i -ésimo tendón en la j -ésima articulación.

Entonces, teniendo en cuenta la figura, podemos adoptar la siguiente nomenclatura:

$$L_1 = L_4 \Rightarrow L_{14} ; L_2 = L_3 \Rightarrow L_{23} ; R_{11} = R_{41} \Rightarrow R_{141} ; R_{12} = R_{42} \Rightarrow R_{142} ; R_{21} = R_{31} \Rightarrow R_{231}$$

Funciones de la **Elasticidad** de los tendones:

Suponemos que *toda* la elasticidad del tendón se puede agrupar en un *solo elemento elástico* (tipo resorte) de constante $k_i > 0$ y se puede construir la *Matriz de Rigideces* del sistema:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_4 \end{bmatrix}$$

Funciones de la **Extensión** de los tendones (debidas a los actuadores):

En primer lugar, se obtiene la *Matriz de Acoplamiento* "P":

$$P = \left[\frac{\partial h}{\partial \varphi} \right]^T = \begin{bmatrix} R_{141} & -R_{231} & R_{231} & -R_{141} \\ -R_{142} & 0 & 0 & R_{142} \end{bmatrix}$$

Luego, se obtiene la *Nueva Matriz de Acoplamiento* "Q":

$$Q = P \cdot K = \begin{bmatrix} K_1 R_{141} & -K_2 R_{231} & K_3 R_{231} & -K_4 R_{141} \\ -K_1 R_{142} & 0 & 0 & K_4 R_{142} \end{bmatrix}$$

Hallamos las diferencias en la extensión debidas a los *mecanismos* " $h(\varphi) - h(0)$ ":

$$h(\varphi) - h(0) = \begin{bmatrix} R_{141} & -R_{142} \\ -R_{231} & 0 \\ R_{231} & 0 \\ -R_{141} & R_{142} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Luego, la *Matriz de Rigidez Total* "S" se obtiene:

$$S(\varphi) = P \cdot K \cdot (h(\varphi) - h(0)) = \begin{bmatrix} R_{141}^2(K_1 + K_4) + R_{231}^2(K_2 + K_3) & -R_{141}R_{142}(K_1 + K_4) \\ -R_{141}R_{142}(K_1 + K_4) & R_{142}^2(K_1 + K_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la ecuación de la dinámica del brazo de dos articulaciones, con tendones elásticos queda de la siguiente forma:

$$[M(\varphi)] \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + [C(\varphi, \dot{\varphi})] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + [N(\varphi, \dot{\varphi})] + [S] \cdot [\varphi] = [Q] \cdot [e]$$

Donde las e_i serán las extensiones producidas por los actuadores, y pueden ser asimiladas a las **señales de control** u_i .

Operando, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & [(m_1 + m_2)L_1^2 + m_2L_2^2 + 2m_2L_1L_2 \cos \varphi_2] \cdot \ddot{\varphi}_1 + [m_2L_2^2 + m_2L_1L_2 \cos \varphi_2] \cdot \ddot{\varphi}_2 - [m_2L_1L_2 \sin \varphi_2] \cdot \left[\dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2 \cdot \left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 \right) \right] + \\ & + [(m_1 + m_2)gL_1 \cos \varphi_1 + m_2gL_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)] + [R_{141}^2(K_1 + K_4) + R_{231}^2(K_2 + K_3)] \cdot \varphi_1 - [R_{141}R_{142}(K_1 + K_4)] \cdot \varphi_2 = \\ & = [K_1R_{141}] \cdot e_1 - [K_2R_{231}] \cdot e_2 + [K_3R_{231}] \cdot e_3 - [K_4R_{141}] \cdot e_4 \\ & [m_2L_2^2 + m_2L_1L_2 \cos \varphi_2] \cdot \ddot{\varphi}_1 + [m_2L_2^2] \cdot \ddot{\varphi}_2 + [m_2L_1L_2 \sin \varphi_2] \cdot \dot{\varphi}_1 + [m_2gL_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)] - [R_{141}R_{142}(K_1 + K_4)] \cdot \varphi_1 + [R_{142}^2(K_1 + K_4)] \cdot \varphi_2 = \\ & = -[K_1R_{142}] \cdot e_1 + [K_4R_{142}] \cdot e_4 \end{aligned}$$

Asignando variables de estado:

$x_1 = \varphi_1$; $x_2 = \dot{\varphi}_1$; $x_3 = \varphi_2$; $x_4 = \dot{\varphi}_2$; $u_i = e_i$ de esta manera, se obtiene: $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = \ddot{\varphi}_1$; $\dot{x}_3 = x_4$; $\dot{x}_4 = \ddot{\varphi}_2$ y el modelo queda conformado en variables de estado:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}x_4 & C_{12}(x_2 + x_4) \\ C_{21}x_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(x_1, x_3) \\ N_2(x_1, x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & 0 & 0 & Q_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Operando con estas ecuaciones, se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} M_{11} \dot{x}_2 + M_{12} \dot{x}_4 &= Q_{11}u_1 + Q_{12}u_2 + Q_{13}u_3 + Q_{14}u_4 - C_{11}x_4x_2 - C_{12}(x_2 + x_4)x_4 - N_1(x_1, x_3) - S_{11}x_1 - S_{12}x_3 \\ M_{12} \dot{x}_2 + M_{22} \dot{x}_4 &= Q_{21}u_1 + Q_{24}u_4 - C_{21}x_2^2 - N_2(x_1, x_3) - S_{21}x_1 - S_{22}x_3 \end{aligned}$$

En estas expresiones, se definen:

$$MM = M_{11}M_{22} - M_{12}^2;$$

$$AA = Q_{11}u_1 + Q_{12}u_2 + Q_{13}u_3 + Q_{14}u_4 - C_{11}x_4x_2 - C_{12}(x_2 + x_4)x_4 - N_1(x_1, x_3) - S_{11}x_1 - S_{12}x_3;$$

$$BB = Q_{21}u_1 + Q_{24}u_4 - C_{21}x_2^2 - N_2(x_1, x_3) - S_{21}x_1 - S_{22}x_3$$

Se despejan las derivadas de x_2 y x_4 , se restan miembro a miembro, y se llega a las expresiones:

$$\dot{x}_2 = \frac{M_{22}}{MM} \cdot [AA] - \frac{M_{12}}{MM} \cdot [BB]; \text{ y } \dot{x}_4 = -\frac{M_{12}}{MM} \cdot [AA] + \frac{M_{11}}{MM} \cdot [BB]$$

Finalmente, el modelo en variables de estado, adopta la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M_{12}S_{21} - M_{22}S_{11}}{MM} & \frac{M_{12}C_{21}x_2 - M_{22}C_{11}x_4}{MM} & \frac{M_{12}S_{22} - M_{22}S_{12}}{MM} & -\frac{M_{22}C_{12}(x_2 + x_4)}{MM} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{M_{12}S_{11} - M_{11}S_{21}}{MM} & \frac{M_{12}C_{11}x_4 - M_{11}C_{21}x_2}{MM} & \frac{M_{12}S_{12} - M_{11}S_{22}}{MM} & \frac{M_{12}C_{12}(x_2 + x_4)}{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{M_{22}}{MM} & \frac{M_{12}}{MM} \\ 0 & 0 \\ \frac{M_{12}}{MM} & -\frac{M_{11}}{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{M_{22}Q_{11} - M_{12}Q_{21}}{MM} & \frac{M_{22}Q_{12}}{MM} & \frac{M_{22}Q_{13}}{MM} & \frac{M_{22}Q_{14} - M_{12}Q_{24}}{MM} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_{11}Q_{21} - M_{12}Q_{11}}{MM} & -\frac{M_{12}Q_{12}}{MM} & -\frac{M_{12}Q_{13}}{MM} & \frac{M_{11}Q_{24} - M_{12}Q_{14}}{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Conclusiones: En este trabajo se presentaron los pasos y se obtuvo el modelo dinámico de un brazo robótico de dos articulaciones, comandado por una red tendonal. Este modelo es de utilidad a la hora de calcular los controles que se aplicarán al brazo, así al establecer una trayectoria junto con las velocidades y aceleraciones sobre dicha trayectoria, es posible calcular las coordenadas de máquina y sus derivadas por medio de transformaciones inversas y determinar de esa forma los pares actuantes requeridos.

Sin embargo esto puede consumir una cantidad de tiempo considerable, para calcular el movimiento entre dos puntos adyacentes en una trayectoria planeada. El tiempo de computo puede reducirse mediante la simplificación de las ecuaciones, por ejemplo ignorando los términos de segundo orden de Coriolis y la reacción centrífuga, pero estos modelos aproximados resultan en un rendimiento subóptimo y requieren que se restrinjan las velocidades de los brazos. La importancia del presente trabajo reside en que la obtención del modelo se ha detallado en todos sus aspectos, ya que en la bibliografía sobre el tema, como por ejemplo [3], [4] y [5] solamente se dan modelos generales, y en muchos casos es difícil deducir la interacción e influencias de los parámetros involucrados. Como el presente trabajo forma parte de un Proyecto aún mayor, este primer paso es imprescindible para poder construir un prototipo.

Bibliografía

- [1] Kobayashi, H.; Ozawa, R. "Adaptive neural network control of tendon-driven mechanisms with elastic tendons", Automatica, 39, 1509-1519 (2003).
- [2] Cirera, E. A.; Cerio, V. L. "Cálculo del modelo dinámico de un brazo robótico de dos articulaciones controlado por red tendonal", Arandú, Revista de divulgación de la Facultad de Ingeniería de la UNNE. Año 5- Volumen 01- marzo de 2003. <http://www.arandu.org.ar/pub/modelo.pdf>
- [3] Kelly, R.; Santibáñez, V. "Control de Movimientos de Robots Manipuladores", Prentice Hall, Madrid (2003).
- [4] Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer, C., Aracil, R. "Fundamentos de Robótica", Mc Graw Hill, Madrid (1997).
- [5] Murray, R; Li, Z; Sastry, S "A mathematical introduction to robotic manipulation", CRC Press (1994)